四庫全書

子部

歴算全書卷三十二

宣城梅文鼎撰

籌算四之五

開帶縱平方法

勿菴氏曰算有九極于句股句股出于圓方故少廣旁要相資為用也然開平方以御句股而縱法以御和較古有益積減積翻積諸術參伍錯綜盡神通變要

之皆帶縱一法而已

帶縱圖

平方積
縱積

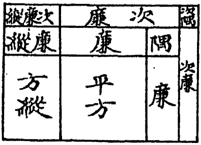
倍不縱圖之倍方

方縱	平方	廉
廉縱	廉	隅

平方者長濶相等如碁局也平方帶縱者直田也長多于濶之數謂之縱縱之濶如平方之數其長則如縱之數縱與方相乘得縱積以加方積成一直田形積也

平方與方縱兩形初商之積也兩廉一隅一廉縱者次商之積也廉有二故倍之廉之縱只一故不倍也

又圖



如前圖除積不盡則有第三商如此圖雖三商亦只倍廉而不倍縱四商以上倣此詳之

用法曰先以積列位如法作點從單位起隔位點之視點在首位獨商之點在次位合兩位商之皆命為實

次以帶縱數用籌與平方籌並列之各為法

視平方籌積數有小于實者用其方數為初商用其

積數為方積（初商自乘之數也）即視縱籌與初商同行之積數用之為縱積（初商乘縱之數也如初商一則用縱籌第一行）兼方積縱積兩數以減原實而定初商（必原實中兼此兩積之數則初商無悞矣故曰定）若原實不及減改而商之如前求得兩積以減之為初商定數　不及減又改商之及減而止

若應商十數因無縱積改商單九是初商空也則于初商之位作○而紀其改商之數于○下若次商者然（初商應是百而改九十應是千而改九百並同）

定位法曰既得初商視所作原實之點共有幾何以定其得數之位以知其有次商與否如一點則得數是單而無次商二點則得數是十而有次商之類皆如平方法取之

次商法曰依前定位知初商未是單數而減積又有未盡是有次商也　次商之法倍初商加入縱為廉法用籌除之　視廉法籌行內之積數有小于餘實者用為廉積以減餘實用其行數為次商　就以次商自乘為隅積以減餘實以定次商必餘實內有廉隅兩積則次商無誤

不及減者改商之及減而止皆如平方法

商三次以上並同次商

命分法曰若得數已是單而有不盡則以法命之　法以所商數倍之加入縱為廉又加隅一為命分不盡之數為得分

亦有得數非單而餘實少在廉法以下不能商作單一者亦以法命之　法即以廉法加隅一為命分

列商數法曰依平方法視所作點而以最上一點為主

若初商五以上（不論單五或五十或五千或五百並同）皆用進法書其得數于點之上兩位則不論縱之多少也

若初商四以下（亦不論單十百千）則以縱之多少而為之進退法以縱折半與初商（單從單十從十百千各以類加）若滿五以上者變從進法書于點之上兩位（如初商四而縱有二初商三而縱有四之類）

若縱數少雖加之而仍不滿五數者仍用常法書其得數于點之上一位（如初商四而縱只有一初商三而縱只有二只有三之類）

總而言之所商單數皆書于廉法之上一位故初商得數有進退之法乃豫為廉法之地以居次商也初商五以上倍之則十雖無縱加廉法已進位矣初商雖四以下而以半縱加之滿五則其倍之加縱而為廉法也亦滿十而進位矣廉法進位故初商必進兩位書也若加半縱仍不滿五則其廉法無進位矣故初商只進一位而書之蓋豫算所商單數已在廉法之上也

又初商若得單數其廉法即為命分凡商得單數必

在命分之上一位以此考之庶無謬誤

假如有直田積六十三步但云濶不及長二步

列位依平方法作點從單位起

七

六三

視點在次位合六十三步商之為實

次以平方籌與縱二籌平列之各為法

視平方籌積有四九小于六三其方七也商作單

七用進法書于點之上兩位一點知所商是單

即視帶縱籌第七行積數一四用為縱積

併方積四十九縱積一十四共六十三除實盡此亦偶除盡耳設不盡其命分必是十數故前商七之數必進書之以存其位

定為濶七步 加縱二步得長九步

凡得數在五以上用進法書于點之上兩位此其例也

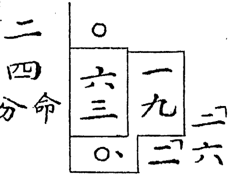
假如有直田六百三十步但云長多濶二步

列位無單位補作圈作點

視點在首位獨商之以〇六百步為實

以平方帶縱二各用籌為法

視平方籌積數有〇四小于〇六



其方二二商二十步二點故初商十自乘得方積四百步隨視縱籌第二行是四得縱積四十步併兩積共四百四十步以減原實餘一百九十步再商之初商十故有次商也

商數二十以縱折半得單一加之共二十一仍不滿五數故只用常法書于點之上一位

次以初商二十步倍之四十步加縱二步共四十二步為廉法用第四第二兩籌

合視兩籌第四行積數一六八小于一九〇次商四減廉積一百六十八步餘二十二步所減首位不空次商故書本位

次以次商四步為隅法自乘得一十六步為隅積用減餘實不盡六步以法命之初商雖不進位所得次商單數已在命分之上

一位矣列商數倍所商二十四步為四十八步加縱法如在于此

二步又加隅一步共五十一步為命分

命為濶二十四步又五十一分步之六加縱二步得長二十六步又五十一分步之六

凡得數在四以下以半縱加之仍不滿五則只用常法書于點之上一位此其例也

假如有直田五畝但云長多濶八十八步

列位以畝法二百四十通之得一千二百步十步單步空補作兩圈作點

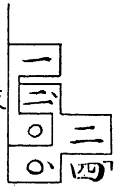
一二〇〇

二　八

視點在次位合商之以一千二百步為實縱有兩位用兩籌與

一二

廉法



平方籌並列各為法

先視平方籌有〇九小于一二宜商三十二點商十因有縱改商二十其方積四百步縱積一千七百六十步初商十與縱相乘故縱單數皆成十數兼兩積共二千一百六十步大于實不及減所商有誤抹去之

改商一十步其方積一百步其縱積八百八十步併兩積共除實九百八十步餘二百二十步再為實以

求次商初商十故有次商也

縱折半四十四步加初商一十步共五十四步故變用進法

次以初商一十步倍之二十步加縱八十八步共一百〇八步為廉法用第一空位第八三籌

合視籌第二行積二一六小于二二〇次商二步于初商一十步之下減廉積一百一十六餘四步所減首位〇故進書之初商豫進正為此也

次以次商二步自乘得四步為隅積除實盡

定為濶一十二步加縱八十八步得長一百步

假如有直田一十二畝半但云長多濶七十步

列位以畝法二百四十通之得三千步百十單皆作圈作點

三〇〇〇、

四

三〇、〇〇

三〇命分

視點在次位以三千〇百步為實

以平方帶縱七十各用籌為法

先視平方籌積有二五小于三〇宜

商五十因縱改商四十步其方積一

千六百步其縱積二千八百步共四

千四百步大于實不及減抹去之

改商三十步其方積九百步其縱積二千一百步共

三千步除實盡

縱七十折半三十五加初商三十共六十五是五以上也故用進法書商三于點上兩位

假有餘實則當再商或命之以分令雖商盡當存共位　命分者廉法加隅一也倍初商加縱共一百三十是原實百者廉法之位也進一位乃單位初商不進兩位何以容單數

凡開得平方三十步為田濶　加縱七十步共一百步為長

假如有直田七畝但云長多濶六十步

列位以畝法二百四十通之得一千六百八十步單位空作圈作點

三　一六八〇

一六八〇

二〇命分

視點在次位合商之以一千六百步為實

以平方帶縱六十步用籌各為法

先視平方籌有一六與實同宜商四十二點初商是十因帶縱改商三十步其方積九百步縱積一千八百步共二千七百步大于實不及減抹去之

改商二十步其方積四百步縱積一千二百步共減一千六百步餘八十步再商之縱折半三十加初商共五十故進書之假餘實滿命分一百〇一步即當商一步故初商豫進以居次商令次商雖空當存〇位故也

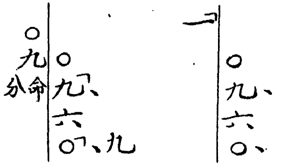
次以初商二十步倍之四十步加入縱六十步共一百步為廉法　廉法大于餘實不及減次商作〇其餘實以法命之　法以廉法加隅一為命分

命為濶二十步又一百〇一分步之八十加縱為長

八十步又一百〇一分步之八十

假如有直田四畝但云長多濶九十步

列位以畝法通之得九百六十步作點



視點在首位獨商之以〇九百為實

以平方帶縱九十步各用籌為法

先視平方籌積有〇九與實同宜

商三十步二點故初商十因帶縱改商二

十步其方積四百步縱積一十八

百步不及減又改商一十步其方積一百步縱積九百步共一千步仍不及減此有二點宜商十步今改商一十仍不及減是初商十位空也縱九十折半四十五加初商十步滿五十以上故商一進書點之上兩位改商單九步其方積八十一步縱積八百一十步共八百九十一步以減實餘六十九步不盡此宜商十數者變商單步故初商之位作○而以改商之九步書于○位下如次商然也蓋必如此書之所商單數乃在命分之上一位也

商數已得單步而有不盡以法命之以商九步倍之加縱九十步共一百〇八步更加隅一步共一百〇九步為命分

命為濶九步又一百〇九分步之六十九加縱為長九十九步又一百〇九分步之六十九

以上四則乃縱多進位之法也凡得數雖四以下以半縱加之滿五即用進法書于點之上兩位此其例也

開帶縱立方法 籌算五

勿菴氏曰泰西家說勾股開方甚詳然未有帶縱之術同文算指取中算補之其論帶縱平方有十一種而于立方帶縱終缺然也程汝思統宗所載又皆兩縱之相同者惟難題堆垛還原有二例祇一可用其一强合而已非立術本意又不附少廣而雜見于均輸雖有善學何從而辨之玆因籌算稍以鄙意完其缺義取曉暢不厭煩複使得其意者可施之他率不窮

云爾

凡立方帶縱有三

一只帶一縱

如云長多方若干或高多方若干是也深即同高

一帶兩縱而縱數相同

如云長不及方若干高不及方若干是也此方多數為縱

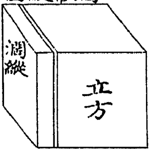
一帶兩縱而縱數又不相同

如云長多濶若干濶又多高若干是也

大約帶一縱者只有縱數而已帶兩縱者有縱廉又有縱方故其術不同

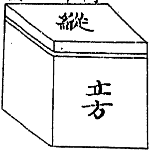
帶一縱圖三

濶帶縱圖



此長多于方也為橫縱橫縱之形濶與高等如其方其厚也如其縱所設

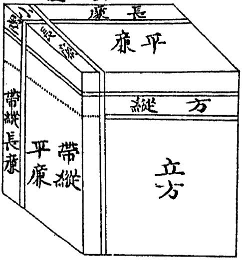
高帶縱圖



此高多于方也為直縱直縱之形長濶相等如其方其高也如其縱所設

俱立方一縱形一合為長立方形

廉法帶縱圖



如圖立方形方縱形合者初商也平廉三內帶縱者二長廉三內帶縱者一小隅一此七者次商也

平廉所帶之縱長與立方等厚與次商等其高也則如縱所設

長廉所帶之縱兩頭橫直等皆如次商其高也如縱所設

用法曰以積列位乃作點從單位起隔兩位點之點畢視積首位有點獨商之以首位為初商之實首位無點以首位合有點之位商之　點在次位以首兩位為初商之實　點在第三位以首三位為初商之實　皆同立方法

先視立方籌積數有小于初商之實者用其方數為初商定位法合計所作點共有若干一點者商單數二點則商十數每一點進一位皆如立方用其積數為初商立方積定位法視初商方數若初商單數其積亦盡于單位若初

商十數其積乃盡于千位每初商進一位其積進三位亦可以點計之皆如立方

次以初商自乘以乘縱數為縱積

合計立方積縱積共數以減原積而定初商若初商無誤者原實中必兼此兩積命初商為方數加縱數為高數或長數皆依先所設

不及減者改商之及減而止

次商法曰依前定位知初商是何等或單十百千等若初商未是單數而減積又有不盡是有次商也

法以初商自乘而三之又以縱與初商相乘而兩之

共為平廉法　又法以初商三之縱倍之併其數與初商相乘得數為平廉法　或以初商加縱而倍之併初商數以乘初商為平廉法並同

又以初商三之加縱為長廉法

乃置餘實列位以平廉法除之得數為次商用籌為法除而得之依除法定其位

于是以次商乘平廉法為三平廉積　又以次商自

乘以乘長廉法為三長廉積　就以次商自乘再乘為隅積　合計平廉長廉隅積共若干數以減原實原實中兼此併積知次商無誤矣　乃併初商次商所得數為方數加縱命為高數或長數皆如先所設　合問　不及減者改商之及減而止

商三次者以初商次商所得數加縱而倍之併商得數為法仍與商得數相乘為平廉法

又以商得數三之加縱為長廉法　餘並同次商

命分法曰已商至單數而有不盡則以法命之　其法以所商得數加縱倍之加所商得數以乘所商得數如平廉又以所商得數三之加縱如長廉併兩數又加單一如隅為命分不盡之數為得分

或商數尚未是單而餘實甚少在所用平廉長廉兩法併數之下或僅同其數僅同者無隅積是無可續商也亦以法命之法即以所用平廉長廉兩法併之又加隅一為命分

列商數法曰依立方法以初商之實有點者為主即原實內最上之一點凡初商得數必書于點之上一位乃常法也

惟初商一數者用常法

有以初商得數書于點之上兩位者進法也初商二三四五者用進法

有以初商得數書于點之上三位者超進法也初商六七八九者用超進之法

若縱數多廉法有進位則宜用常法者改用進法宜

用進法者用超進之法宜超進者更超一位書之

其法于次商時酌而定之葢次商時有三平廉法三長廉法再加隅一為命分法于原實尋命分之位為主命分上一位單數位也從此單數逆尋而上自單而十而百而千至初商位止有不合者改而進書之

若與初商恰合者不必强改此法甚妙平方帶縱亦可用之

若宜商一十而改單九或宜商一百而改九十凡得

數退改小一等數者皆不用最上一點而以第二點論之此尤要訣（或于初商位作圈而以所商小一等數書于圈之下即可以上一點論也）（細考其數則同此商數列位立法之妙宜詳翫之）

假如浚井計立方積七百五十四萬九千八百八十八尺但云深多方八百尺　法以立方帶縱為法除之

列位　作點

初商求定之圖

○○七、五四九、八八八、

一

視點在首位獨商之以○○七百萬尺為初商之實

以立方籌為法　視立方籌積有○○一小于○○七商一百尺三點故初商百商一百故用常法書于點之上一位得立方積一百萬尺三點者方積盡百萬之位初商之方積當盡于最上之一點次以初商一百尺自乘一萬尺乘縱八百尺得八百萬尺為縱積　併兩積九百萬積大于原實不及減抹去之不用改商如後圖

視立方籌第九行積七二九改商九十尺得立方積七十二萬九千尺百改十故亦改用第二點第二點是十位故方積亦盡於千位次

改商之圖

三〇

七五四九〇八八

〇九

以初商九十尺自乘八千一百尺乘縱八百尺得六百四十八萬尺為縱積　併兩積共七百二十萬〇九千尺以減原實餘三十四萬〇八百八十八尺再商除之初商一百令改商九十故上一點不用用第二點論之商九者書于第二點之上三位超進法也

次用次商又法以縱八百尺加初商九十尺而倍之得一千七百八十尺併初商九十尺共一千八百七

十尺用與初商九十尺相乘得一十六萬八千三百尺為平廉法　又以初商九十尺三因之得二百七十尺加縱八百尺共得一千〇七十尺為長廉法

乃列餘實以平廉為法除之用第一第六第八第三共四等

商九十用超進法書于第二點之上三位令以縱多致廉法進為十萬故次商時應更為酌定又超一位書之然後次商單數在廉法上一位矣改如後圖廉法十萬上一位單數位也令商九十不合在此位故改之

酌改進位之圖

三〇

七五四九八八八

九九 廉法

〇三〇

七五四九八八八

九二 廉法

合視籌第二行積〇三三六六小于餘實次商二尺于初商九十之下所減首位是〇法宜進書也初商不改而更超之何以居次商就以次商二尺乘平廉法得三十三萬六千六百尺為平廉積　又以次商二尺自乘四尺用乘長廉法得四千二百八十尺為長廉積　又以次商二尺自

乘再乘得八尺為隅積　併三積共三十四萬〇八百八十八尺除實盡

乃以商數命為井方　加縱為井深

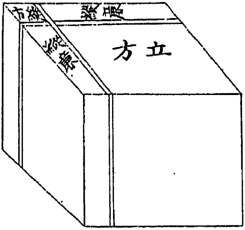
計開

井方九十二尺深八百九十二尺

此超進法改而更超一位也

帶兩縱縱數相同圖二

帶兩縱圖



此高不及方也方之横與直俱多于高是為兩縱兩縱者縱廉二縱方一并立方而四

立方形長濶高皆相等

縱廉形高與濶相等如其方之數其厚也如所設縱之數

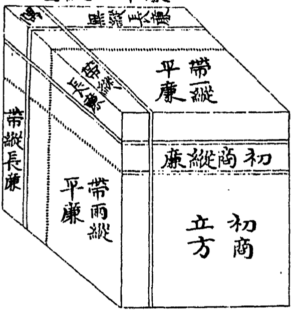
縱方形兩頭等皆如縱數其高也如立方之數

兩縱廉輔立方兩面而縱方補其隅合為一短立方

形

不及之數有在立方旁者觀後圖可互見其意

廉帶兩縱圖



如圖初商有立方有縱廉二縱方一共四形今只圖其二餘為平廉所掩意會之可也此横頭不及方也即前圖之眂體

次商平廉三內帶一縱者二帶兩縱者一長廉三內帶縱者二小隅一共七

平廉帶一縱者濶如初商加縱為長厚如次商其帶兩縱者高濶皆等皆如初商加縱之數厚如次商

長廉帶縱者長如初商加縱之數其兩頭橫直皆等皆如次商

無縱長廉長如初商兩頭橫直等如次商

小隅橫直高皆等皆如次商

用法曰先以縱倍之為縱廉兩縱併也以縱自乘為縱方兩縱相乘

此因兩縱數同故其法如此也若兩縱不同徑用乘法併法矣

乃如法列位作點求初商之實

以立方籌為法求得初商方數及初商立方積（皆如立方法皆依定位法命之）

次以初商乘縱方得數為縱方積　又以初商自乘數乘縱廉得數為縱廉積

合計縱方縱廉立方之積共若干數以減原實而定初商（皆如一縱法）

命初商為高數（或深數皆如所設）加縱為方數（不及減改商之若初商未

是單數則以餘實求次商

次商法曰以初商加縱倍之以乘初商高數得數又以初商加縱自乘得數併之共為平廉法又法初商三之加縱以初商加縱乘之得數為平廉法亦同次以初商加縱倍之併初商數共為長廉法又法初商三之縱倍之併為長廉法亦同乃置餘實列位以廉法位酌定初商列法而進退之以平廉為法而除餘實得數為次商皆以所減首位是○與否

而為之進若退　又法合平廉長廉兩法以求次商

于是以次商乘平廉法為平廉積　又以次商自乘

數乘長廉法為長廉積　又以次商自乘再乘為隅

積　合計平廉長廉隅積共若干數以減餘實而定

初商皆如一縱法

又法以次商乘長廉法為長廉法又以次商自乘為隅法併平廉長廉隅法以與次商相乘為次商廉隅共積以減餘實亦同

乃命所商數為高或深之類如所設　加縱數命為方合問

不盡者以方倍之乘高又以方自乘如平廉又以方倍之併高如長廉又加單一如隅為命分

假如有方臺積五百八十六萬六千一百八十一尺但云高不及方一百四十尺　以帶兩縱立方為法除之方者長闊等每面各多高一百四十尺

先以縱一百四十尺倍之得二百八十尺為縱積

又縱自乘之得一萬九千六百尺為縱方

列位　加點

一〇
〇〇五八六六一八一
一（一）單廉數法

視點在首位獨商之以〇〇五百萬尺為初商之實視立方積有〇〇一小于〇〇五商一百尺三點故商百尺得立方積一百萬尺商一數宜用常法書于點之上一位今因縱多致廉法昇為十萬法上一位為單單上一位為十令初商是百尺故改用進法書之廉法之昇見後

就以初商一百尺乘縱方得一百九十六萬尺為縱方積

又以初商一百自乘一萬乘縱廉得二百八十萬尺為縱廉積

合計立方縱方縱廉積共五百七十六萬尺以減原實餘一十萬〇六千一百八十一尺初商百尺宜有續商

初商一百尺高也　加縱共二百四十尺方也

次以方倍之四百八十尺用乘高數得四萬八千尺

又以方自乘之得五萬七千六百尺併之得一十萬〇五千六百尺為平廉法

又以方倍之併高得五百八十尺為長廉法

乃列餘實　以廉法酌定初商改進一位書之

一〇

〇〇五八六六八一

一〇一

以平廉法用籌除餘實

視籌第一行〇一〇五六

小于餘實次商一尺于初

商一百尺之隔位所減是〇一〇五六首位〇宜進書然猶與初商隔位故知為單一尺

就以次商一尺乘平廉法如故又以次商一尺

自乘以乘長廉法亦如故就命為平廉長廉積　又

以次商自乘再乘仍得一尺如故　合計三積共一十萬〇六千一百八十一尺除實盡

乃以所商數命為臺高　加縱為方

計開

臺高一百〇一尺　方二百四十一尺

此常法改用進法也

假如有方池積五十萬丈但云深不及方五十尺　先以縱五十尺倍之一百為縱廉　又縱自乘之得二千五百

尺為縱方

列位　加點

五〇、〇〇〇〇、

五
五

視點在第三位合商之以五十萬〇〇尺為初商之實

視立方籌有三四三小于五〇〇宜商七十尺二點商十尺因縱改商六十尺得立方積二十一萬六千尺　次以初商六十尺自乘三千六百尺用乘縱廉一百尺得三十六萬尺已大于實不

及減不必求縱方積矣　改商五十尺用籌求得立方積一十二萬五千尺

就以初商五十尺乘縱方得縱方積亦一十二萬五千尺　又以初商五十尺自乘二千五百尺用乘縱廉得縱廉積二十五萬尺　併三積共五十萬尺除實盡　以商數命為池深　加縱為方

計開　池深五十尺　方一百尺

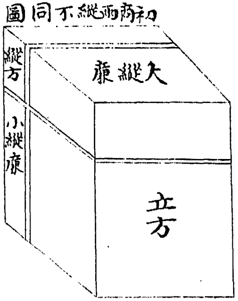
此進法改為超進也　假有次商則其平廉法二萬尺矣假有命分則其命分二

萬〇二百五十一矣

亦有高與長同而濶不及數者準此

求之但以初商命為濶而加縱為高與長

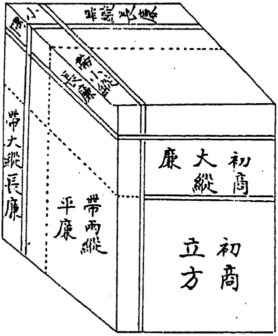
帶兩縱縱數不相同圖二



此長多于濶而高又多于長也是為兩縱而又不相同凡為大縱廉小縱廉各一縱方一并立方形而四立方形長濶高相等

大縱廉橫直等如其方而高如大縱 小縱廉高濶

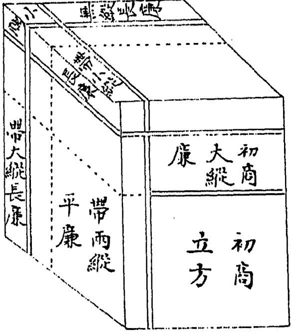
次商兩縱不同圖



等如其方而厚如小縱縱方形之兩頭高如大縱厚如小縱其長也則如立方　大縱小縱以輔立方之兩面而縱方補其闕合為一長立方形

如圖初商有立方有大縱廉小縱廉縱方各一共四

次商兩縱不同圖



只圖其二餘為平廉所掩也

次商平廉三內帶小縱者一帶大縱者一在初商大縱立方之背面帶兩縱者一

長廉三內帶小縱者一帶大縱者一

小隅一共七

帶小縱平廉濶如初商長如初商加小縱之數高如

次商

帶大縱平廉濶如初商高如初商加大縱之數厚如

次商

帶兩縱平廉濶如初商加小縱之數高如初商加大

縱之數厚如次商

帶小縱長廉長如初商加小縱之數　帶大縱長廉

高如初商加大縱之數　無縱長廉長如初商數

其兩頭横直皆如次商之數

小隅横直高皆如次商之數

用法曰以兩縱相併為縱廉　以兩縱相乘為縱方

列位作點求初商之實　以立方籌求得初商立方

積　以初商求得縱方縱廉兩積　皆如前法

乃以初商命為濶　各加縱命為長為高

求次商者以初商長濶高維乘得數而併之為平廉法

又以初商長濶高併之為長廉法

乃置餘實列位以平廉酌定初商之位以平廉為法求次商及平廉積長廉積隅積以減餘實乃命所商為濶各以縱加之為高為長如所設皆如前法

不盡者以所商長濶高維乘併之如平廉又以長濶高併之如長廉又加單一如隅為命分

假如有長立方形積九十尺但云高多濶三尺長多濶二尺

先以兩縱相併五尺為縱廉　以兩縱相乘六尺為

縱方

列位　作點

○九○
三

視點在第二位合商之以○九十○尺為初商之實

乃視立方籌有○六四小于○九○宜商四八因有縱改商三尺得二十七尺為立方積原實只一點故初商是單商三故書于點之上兩位用進法也

次以初商三尺自乘九尺乘縱廉得四十五尺為縱

廉積

又以初商三尺乘縱方得一十八尺為縱方積

併三積共九十尺除實盡

乃以初商命為濶　各加縱為高為長

計開

濶三尺　長五尺　高六尺

假如有立方積一千六百二十尺但云長多濶六尺高多濶三尺

先以兩縱相併九尺為縱廉　以兩縱相乘一十八尺為縱方

列位　作點

○○一六二○

一九

視點在首位獨商之以○○一千尺為初商之實

乃視立方籌有○○一與實同商一十尺二點商十得立方積一千尺次以初商一十尺自乘一百尺乘縱廉得九百尺為縱廉積又以初商一十尺乘縱方得一

百八十尺為縱方積　合計之共二千〇八十尺大于實不及減商一十故用常法書于點之上一位改商九尺得七百二十九尺為立方積十變為單則上一點不用用第二點故商九書于第二點之上兩位用超進法也

次以初商九尺自乘八十一乘縱廉亦得七百二十九尺為縱廉積

次以初商九尺乘縱方得一百六十二尺為縱方積

併三積共一千六百二十尺除實盡

乃以商數命為濶　各加縦為長為高

計開

濶九尺　長一十五尺　高一十二尺

假如有長立方積六萬四千尺但云長多濶五尺高又多長一尺

先以長多五尺高多六尺併之得十一為縦廉　又以五尺六尺相乘三十為縦方

解曰長多濶五尺高又多長一尺是髙多濶六尺也

列位　作點

二六二

○六四○○○、

三

視點在第二位合商之以○六萬四千尺為初商之實視立方籌有○六四與實同宜商四十尺因有縱改商三十尺（二點故商十尺）得二萬七千尺為立方積（商三十故書于點之上兩位用進法也）

次以初商三十尺自乘九百尺乘縱廉得九千九百尺為縱廉積

次以初商三十尺乘縱方得九百尺為縱方積

併三積共三萬七千八百尺以減原實餘二萬六千

二百尺再商之初商十宜有次商

初商三十尺闊也　加縱五尺共三十五尺長也

又加一尺共三十六尺高也

乃以初商長闊高維乘之

闊乘長得一千○五十尺　高乘闊得一千○八

十尺　長乘高得一千二百六十尺

併三維乘數共三千三百九十尺為平廉法又法併長與高乘濶又以高乘長併之亦同

次以初商長濶高併之共一百〇一尺為長廉法又法初商三之加兩縱亦同

乃以平廉用籌為法以餘實列位除之

如後圖合視籌第六行是二〇三四小于餘實次商六尺所減首位不空故書本位得二萬〇三百四十尺為平廉積次商乘平廉法也

二〇
〢〦〢八
$\boxed{六四〇}$〇〤
三六廉法

次以次商六尺自乘三十六尺乘長廉
法得三千六百三十六尺為長廉積
又以次商六尺自乘再乘得二百一十
六尺為隅積

併三積共二萬四千一百九十二尺以減餘實餘二
千〇〇八不盡以法命之
法以初商闊高長各加次商為闊高長而維乘之
闊乘長得一千四百七十六尺　高乘闊得一千

五百一十二尺　長乘高得一千七百二十二尺併得四千七百一十尺如平廉　又併濶高長得一百一十九尺如長廉　又加一尺如隅　共得四千八百三十尺為命分不盡之數為得分

命為四千八百三十分尺之二千〇〇八即奇數也

計開

濶三十六尺有奇音基　長四十一尺有奇

高四十二尺有奇

假如有長立方形積一十萬〇一千尺但云長多濶五尺高多濶六尺

先以兩縱併得一十一尺為縱廉

以兩縱乘得三十尺為縱方

列位 作點

一八二

一〇一〇〇〇、

四

視點在第三位合三位商之以

一十萬〇一千為初商之實

乃視立方籌有〇六四小于一

〇一商四十尺二點商十得六萬四千尺為立方積商四十故書于點之上兩位進法也

次以初商自乘一千六百尺乘縱廉得一萬七千六百尺為縱廉積

次以初商乘縱方得一千二百尺為縱方積

併三積共八萬二千八百尺以減原實餘一萬八千二百尺再商之

初商四十尺濶也　加縱五尺得四十五尺長也

加縱六尺得四十六尺高也

乃以初商濶長高而維乘之

長乘濶得一千八百尺　濶乘高得一千八百四十尺又法併高與長九十一尺以濶四十尺乘之共三千六百四十尺省兩維乘其數亦同

高乘長得二千〇七十尺

併維乘數共五千七百一十尺為平廉法

又以濶長高併之共一百三十一尺為長廉法

乃列餘實以平廉用籌為法除之

六

一八二四八

一○一○○○

四三

合視籌第三行是一七一三小于餘實次商三尺所減首位不空就故本位書之以次商三尺乘平廉法得一萬七千一百三十尺為平廉積　又以次商三尺自乘九尺乘長廉法得一千一百七十九尺為長廉積　又以次商三尺自乘再乘得二十七尺為隅積　併之得一萬八千三百三十六尺大于餘實不及減

改商二尺

就以次商二尺乘平廉法得一萬一千四百二十尺為平廉積即用籌第二行取之

次以次商自乘四尺乘長廉法得五百二十四尺為長廉積　又以次商自乘再乘得八尺為隅積

併之共一萬一千九百五十二尺以減餘實仍餘六千二百四十八不盡以法命之

法以濶長高各加次商二尺為濶長高而維乘之

併高四十八尺長四十七尺共九十五尺以濶四十二尺乘之得三千九百九十尺代兩維乘又以長乘高得二千二百五十六尺併得六千二百四十六尺　又以長濶高併之得一百三十七尺　又加一尺　共六千三百八十四爲命分

命爲六千三百八十四之六千二百四十八即奇數

計開

濶四十二尺有奇

長四十七尺有奇

高四十八尺有奇

歷算全書卷三十二

欽定四庫全書

子部

歴算全書卷三十三至三十五

詳校官欽天監監正臣喜常

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣劉福徵

繪圖監生臣劉秉仁

欽定四庫全書

歴算全書卷三十三

宣城梅文鼎撰

籌算六之七

開方捷法

勿菴氏曰廉隅二形也故有二法今借開方大籌為隅法列于廉法籌之下而合商之則廉隅合為一法而用加捷矣存前法者所以著其理用捷法者所以善

其事

平方

法曰如前列實從單位作點每隅位點之以求初商初商列位有常法進法俱如前既得初商即倍根數為廉法亦同前法以廉法數用籌廉法幾位用籌幾根列于平方籌之上為廉隅共法或省曰次商法合視廉隅共法籌其行内有次商之實同者或略少者減實以得次商以本行内方根命之三商者合初商次商倍之以其數用籌列平方籌上

為廉隅共法或三商法省曰以除三商之實而得三商

四商以上倣此求之

解曰隅者小平方也故可以平方籌為法　廉之數每大于隅一位令以平方籌為隅列于廉之下則隅之進位與廉之本位兩半圓合成一數故廉隅可合為一法

何以知廉大于隅一位也曰有次商則初商是十數矣平方廉法是初商倍數其位同初商故大于隅一位

凡初商減積盡最上一點故最上一點者初商之實也次商減積盡第二點故第二點以上次商之實也三商減積盡第三點故第三點以上三商之實也推之第四點為四商之實第五點為五商之實以上並同

審空位法曰若次商之實小于廉隅共法之第一行凡籌第一行最小數也則知次商是空位也不能成一數故空即作圈于初商下以為次商　乃于廉法籌下平方籌上加一空位籌為廉隅共法以求三商若空位多者另有簡法見後

三商實小有空位並同

假如有平方積二千四百九十九萬九千九百九十九尺問每面若干

列位 作點

八

二四九九九九九九

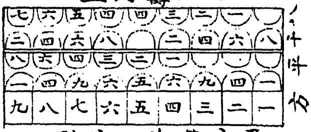
四

如圖點在次位以二千四百萬為初商實視平方籌有小于二四者是一六其方四也商四千尺減積一千六百萬尺有四點故

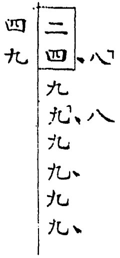
初商是千而有次商

次以初商四千尺倍之得八千尺為廉法用第八籌列平方籌上為廉隅共法

廉法籌列上



平方籌為隅法列下



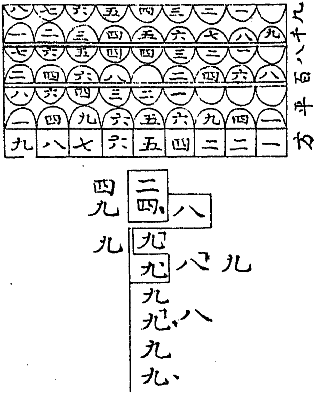
以第二點餘實八百九十九萬為次商實視籌第九行合數八〇一小于實次商九百尺減實八百〇一萬尺

此所減首位不空故對位書之

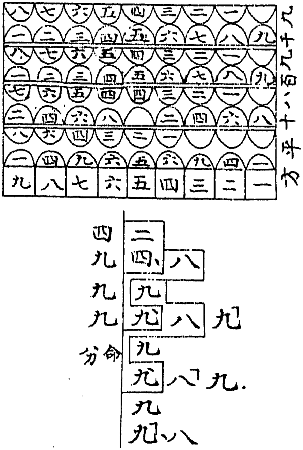
次倍初商次商共四千九百尺得九千八百尺用第九第八兩籌列平方籌上為廉隅共法　以第三點上餘實九八九九為三商之實

合視籌第九行是八九〇一小于實商九十尺減餘

實八十九萬〇一百尺首位不空故亦對位書之



次倍三次商共四千九百九十尺得九千九百八十尺用九九八三籌列平方籌上為廉隅共法



以第四點上餘
積九九八九九
為四商之實
合視籌第九行
積八九九〇一
小于實商九尺
減餘實八萬九
千九百〇一尺

不盡九千九百九十八尺

開方已得單尺而有不盡以法命之倍方根加一數得九千九百九十九為命分

凡開得平方四千九百九十九尺又九千九百九十九之九千九百九十八

右例可明四以上用常法之理葢積所少者不過萬分之一不能成五數之方而其法迥異

加空籌式

假如有平方積一千六百七十七萬七千二百一十六

問每面若干

列位 作點

。

一六七七七二一六

四

如圖點在次位以一千六百萬

為初商實

視平方籌有一六與實同其方

四商四千尺減積一千六百萬尺凡餘實必在商數下一位起倘空位則作圈補之後倣此

次以初商四千尺倍得八千尺為廉法

用第八籌列平方籌上為廉隅共法籌見前例

以第二點上餘實○七七為次商實

○

籌最小數是○八一第一行數大于實

不及減是商數無百也

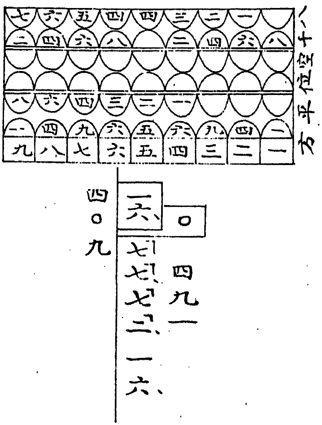
$\boxed{一六}$七七七二一六

四○

乃于初商四千下作一圈以為次商減去實中○位

次如上圖加一空位籌于次商廉法之下平方籌之上為三商廉隅共法

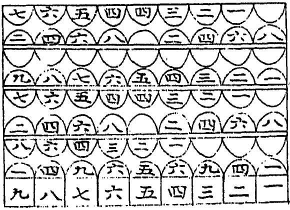
以第三點上七七七二為三商實

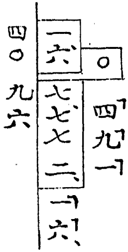


視籌第九行是七二八一小于實商九十尺減積七十二萬八千一百

次合初商次商三商共四〇九倍之得八一八為廉法

八千一百八十平方





去空位籌加一八兩籌列于平方籌之上為四商廉隅共法

以第四點上四九一一六為四商之實

合視籌第六行數與實合商六尺減積四萬九千一百一十六尺恰盡

凡開得平方四千〇九十六尺

假如有平方積九億〇〇一十八萬〇〇〇九步問每面若干

列位

作點

如後圖點在首位以○九億步為初商實

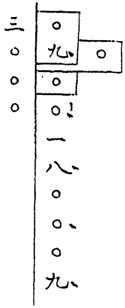
○
○九、○○、一八、○○、○九、
三

視平方籌有○九與實同商三萬步五點故初商萬減積九億步次以初商三萬步倍之得六萬步用第六籌加平方籌上為次商法即廉隅共法以第二點上為次商之實視實三位俱空無減知商數

有空位且不止一空位也如前法宜挨次商得一空位則于原實内銷一圈凡續商之實必下于前商之實一位故雖○位必減去之以清出續商之實而于共法籌内加一空位籌如此挨商頗覺碎雜故改用又法

又法曰凡實有多空位者知商數亦有多空不必挨商當于原實中審定可減之數在何位則此位之上皆連作圈而徑求後商如此餘實有三圈皆無積可減必至○一乃有可減而法是第六籌籌最小是○

六大于〇一仍不可減必至一八方可減而一是籌之進位當以商數對之則知以上俱是空位乃皆作圈合視之有三圈即次商三商四商也于原實内銷去三圈如後圖



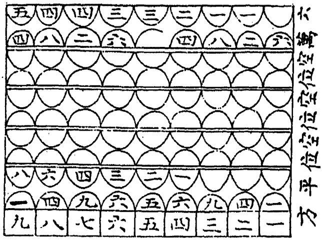
此即次商三商四商合圖也

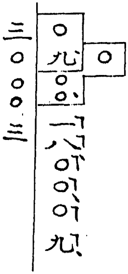
次加三空籌于平廉第六籌之下平方之上為五商廉

隅共法　經以第五點上一八〇〇〇九為五商實

視籌第三行數與餘實合商三尺

除積一八〇〇〇九恰盡





凡開得平方三萬〇〇〇三步

又假如積二千五百〇七萬〇〇四十九尺問方若干

列位 作點

〇〇
二五〇七〇〇四九

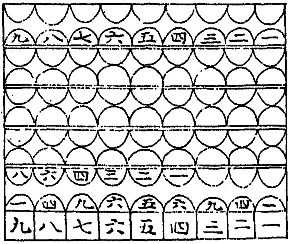
五

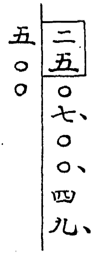
如圖點在次位以二千五百萬尺為初商實視平方籌有二五與實同

其方五商五千尺減積二千五百萬尺

次倍初商五千尺得一萬〇千尺用一籌空位籌為廉法凡商得五數則原帶有空位列平方籌上為次商法實多

空位以前除又法審之必至○七萬尺乃有可減而○七之○與籌上首位之○對當以商數居之則知此以上俱無商數也于是于初商五千下作兩圈如後圖



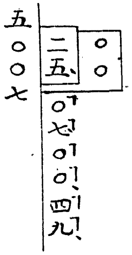


此次商三商合圖也原實上減兩圈商數下加兩圈

如上圖加兩空位籌于廉法一萬○千之下平方之上爲四商法

以○七○○四九爲四商實次商三商之兩點已銷故徑用第四點

視籌第七行相合商七尺減實恰盡



凡開得平方五千○○七尺

又假如積五千六萬三千五百○○尺問方若干

列位

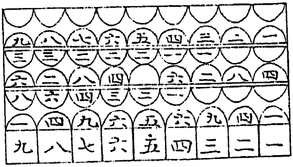
作點　如圖點在次位以五十六萬為初商實

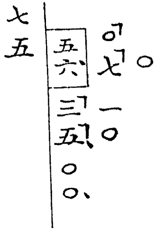
。七
五六三五。。
七

視平方第七行是四九小于實商七百尺除實四十九萬

次倍初商七百得一千四百用第一第四兩籌列平方籌上為次商法　以第二點上〇七三五為次商實

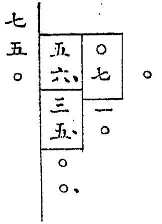
初商倍數平方





合視第五行是〇七二五小于實商五十尺減去餘積〇七萬二千五百尺

次合商數七百五十倍之得一千五百○尺應用第一第五空位三籌加于平方籌上為三商法以第三點上○二千○○尺為三商實而實小于法不能成一尺乃于商數末作一圈以為三商其不盡之數以法命之



凡廉隅共法籌第一行數即命分也蓋能滿此數即成一單數矣

凡開得平方七百五十○尺又一千五百○一之一千○○○約為

三之二弱

立方

法曰如前列實隔兩位作點以求初商既得初商即以初商數自乘而三之為平廉法（即方法）以平廉法用籌列于立方籌之上（借立方籌為隅法也）為平廉小隅共法別以初商數三之而進一位為長廉法（即廉法）以長廉法用籌列于立方籌之下（法于長廉數下加一空籌以合進一位之數）先以平隅共法（即平廉小隅共法或省曰共法）為次商之法即截取

初商下一位至第二點止為次商之實法除實得次商視共法籌内有小于實者為平廉廉小隅共積用其根數為次商次以次商之自乘數即大籌立積下所帶平方積數與長廉法相乘以平方數尋長廉籌之行取其行内積數用之得數加入平隅共積為次商總積以此總積減次商之實及減則已倘不及減轉改次商及減而止因廉積或大有不及減者
三商者合初商次商數自乘而三之為平廉法以其數用籌列方籌上為平廉小隅共法

別以初商次商數三而進位以其數用籌加一空位籌列立方籌下為長廉法

截取次商下一位至第三點為三商之實共法為法除之以得三商其積為共積　次以三商自乘數與長廉法相乘得數加入共積為三商總積　減實又一法長廉法不必加空位籌得于得數下加一圈即進位也

四商以上倣此

解曰隅者小立方也故可以立方籌為法平廉之數每

大于隅二位今以立方籌為隅列于平廉下則隅之首位與平廉之末位兩半圓合成一數故平廉小隅可合為一法　長廉之兩頭皆如次商自乘之數故可以平方乘之又長廉之數每大于隅一位故于下加一空籌以進其位便加積也

何以知平廉大于隅二位而長廉只大一位也曰平廉者初商自乘之數也初商于次商為十數十乘十則百數矣隅積者次商本位也故平廉與隅如百與單相去二位也若長廉只是初商之三倍位同初商初商與次商如十與單故長廉與小隅亦如十與單相去一位也

凡初商積盡于上一點故上一點為初商實次商積盡于第二點故第二點以上為次商實推之三點為三商實四點為四商實以上並同

審空位法曰若次商之實小于平廉小隅共法之第一行或僅如共法之第一行而無長廉積則次商是空位也即作圈于初商下以為次商乃于平廉籌下立方籌上加兩空位籌為三商平廉小隅之共法以求三商其長廉法下又加一空位籌為

并原有一空位籌共兩空位籌

三商長廉法又法長廉不必加空籌但于得數下加兩圈若商數有兩空位者平廉小隅籌下加四空位籌長廉積下加三圈

解曰有空位則所求者三商也初商于三商如百與單而平廉者初商之自乘百乘百成萬故平廉與三商之隅如萬與單大四位也此加兩空籌之理也平廉原大二位加二空籌則大四位矣初商與三商既如百與單則長廉與隅亦如百與單大兩位也此又加一空籌之理也

初商列位商一用常法二至五用進法六至九用超法

令各存一例于後

假如有立方積六百八十五萬九千尺問每面若干

列位　作點

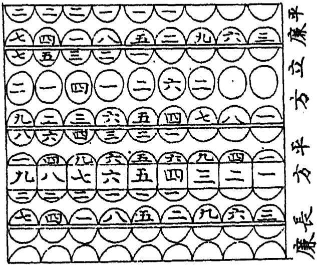
五

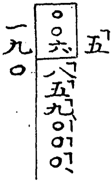
○○六八五九○○○

商數一故書于點之上一位用常法例也

如圖點在首位以○○六百萬為初商實視立方籌有小于○○六者○○一也其立方一商一百尺三點故初商百減積一百萬

尺次截取第二點上五八五九為次商實





以初商一百尺自乘得一萬尺而三因之得三萬

尺為平廉法用第三籌列立方籌上為平廉小隅

共法

別以初商一百尺三而進位得三百〇十尺為長

廉法

列立方籌下視平隅共法籌第九行是三四二九

小于實商九十尺

次以第九行平方八一乘長廉三得二四三〇以加

共積得五百八十五萬九千為次商九十尺之積除

實盡

次商十宜有三商而除實已盡是方面無單數也

凡開得立方每面一百九十〇尺

假如有立方積一千二百八十六億三千四百六十七

萬〇五百九十二尺問方若干

列位

作點

〇三
一二八、六三四、六七〇、五九二、
五
商數五故書于點之上兩位二至五用進法也

如圖點在第三位以一千二百八十億為初商實

視立方籌內有小于一二八是一二五其方五也商五千尺四點故初商千減積一千二百五十億

次截取第二點上〇三六三四為次商實

以初商五千自乘得二千五百萬而三之得七千五百萬為平廉法用七五兩籌列立方籌上為平廉小

隅共法別以初商五十尺三而進位得一萬五千〇

百尺為長廉法用籌列立方籌下

〇三

一二八六三四、六七〇、五九二、

五〇

視共法籌第一行是〇

七五〇一大于實不及

減知次商百位空也于

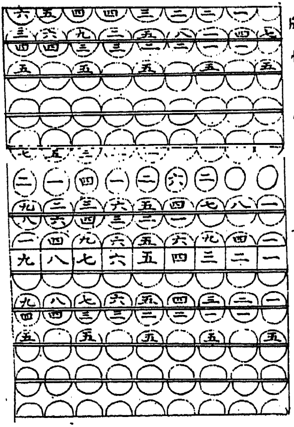
初商下作一圈為次商原實上減一圈

乃截第三點三六三四六七〇為三商實

次于平廉籌下立方籌上加兩空位籌為平廉小隅

共法

于長廉籌下又加一空位籌原有一空位為長廉法籌共二空位



平廉兩空位 立方 平方 長廉二空位

視共法籌第四行

〇

三一〇〇六

一三八

六三四六七〇五九二

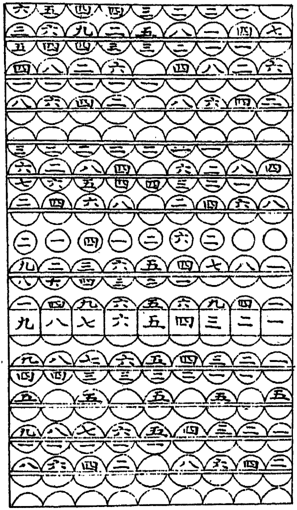
五〇四

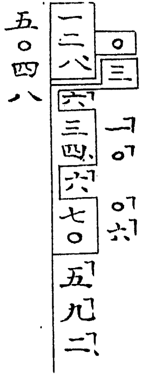
是三〇〇〇六

四小于實用為共

積商四十尺　以長廉法與四行之平方一六相乘得二四〇〇〇〇為長廉積加入共積得三〇二四〇六四減積三十〇億二千四百〇六萬四千尺

次以商數五千〇四十自乘得二千五百四十〇萬一千六百尺而三之得七千六百二十〇萬四千八百尺為平廉法列立方籌上為平隅共法別以商數五千〇四十尺三而進位得一萬五千一百二十〇尺為長廉法列立方籌下





乃截第四點
六一〇六〇
六五九二為
四商之實
視共法籌第
八行六〇九
六三八九
一二小于實

商八尺以長廉法與第八行平方六四相乘得九六七六八〇為長廉積以加共積得六一〇六〇六五九二除實盡

凡開得立方每面五千〇四十八尺

右加兩空籌例

假如有立方積七千二百九十七億二千九百二十四萬三千〇二十七尺問每面若干

列位 作點

○○○
七˙二˙九˙七二九˙二四三˙○二七˙
商數九書于點上三位六至九用超進法也
九

如圖點在第三位以七千二百九十億為初商實視立方籌方九之積七二九與實同商九千尺減積七千二百九十億四點故初商千次截第二點○○○七二九為次商實以初商九千尺自乘八千一百萬尺而三之得二億四千三百萬尺為平廉法列立方籌上為平廉小隅共法別以初商九千尺三而進位得二萬七千○百

尺為長廉法列立方籌下　視共法籌第一行是〇二四三〇一大于實不及減知次商百位空也于初商九千尺下作一圈為次商原實上減去一圈乃于平廉籌下立方籌上加兩空籌為平廉小隅共法于長廉籌下又加一空籌得二七〇〇為長廉法　截取第三點〇〇七二九二四三為三商實　視共法籌第一行是〇二四三〇〇〇一大于實仍不及減知三商十位亦空也于商得九千〇百下加一圈為三商原實上又減去一圈

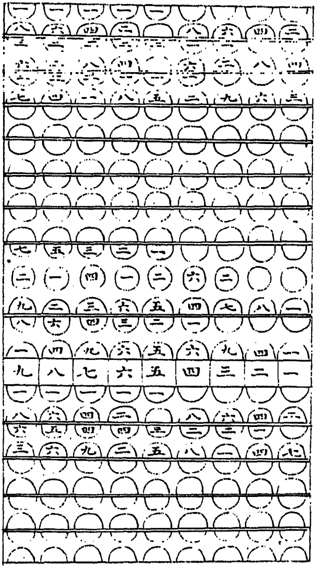
又法實多空不必挨商但尋至不空之界如〇七乃與平廉相應即于〇七之上初商之下作連圈為次商三商而于原實中銷兩圈

〇〇〇
七二九
七二九二四三〇二七
九〇〇

此次商三商合圖也

乃于平廉籌下立方籌上又加兩空籌共四空籌為平廉小隅共法　其長廉籌下又加一空籌共三空籌得二七〇〇〇為長廉法或不必加籌只于得數下加三圈亦同

截取第四點〇七二九二四三〇二七為四商實


平廉
四
空
空等
立方
平方
長方
三廉
二空
空等

〇〇〇
七二九
七二九二四三〇二七
九〇〇三

視共法籌第三行是〇七二九〇〇〇〇二七小于實商三尺　以長廉法與第三行平方〇九相乘得二四三〇〇〇為長廉積以加共積得〇七二九二四三〇二七除實盡

凡開得立方每面九千〇〇三尺

右加四空籌例

開方分秋法 籌算七

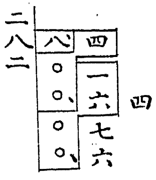
勿菴氏曰命分古法也然但可以存其不盡之數而已若還原則有不合故有分秒法以御之也雖亦終不能盡然最小之分即無關于大數視命分之法不啻加密矣

平方

法曰凡開平方有餘實不能成一數不可開矣若必欲開其分秒則于餘實下加二圈原實一化爲一百分如法開之

所得根數是一十分內之幾分也或加四圈（原實一化為一萬分）如法開之所得根數是一百分內之幾分也或加六圈（原實一化為一百萬分）如法開之所得根數是一千分內之幾分也如此遞加兩圈則多開得一位乃至加十圈（原實一化為百億分）其根數則十萬分內之幾萬幾千幾百幾十幾分也

假如平方積八步開得二步除實四步餘四步不盡分秋幾何



法于餘實下添兩圈則餘實四步
化為四百○○分為次商之實
依捷法以初商二步倍作四步為
廉法列平方籌上為廉隅共法簡
籌第八行積三八四小于餘實次商八分除實三百
八十四分開得平方每面二步八分不盡一十六分
再開之
又于餘實下加兩圈則餘實一十六分化為一千六

百○○秋為三商之實

依捷法以初商次商共二步八分倍之得五步六分為廉法列平方籌上為廉隅共法簡籌第二行積一一二四小于餘實商作二秋除實一千一百二十四秋共開得平方每面二步八分二秋不盡四百七十六秋

此單下開兩位式也所不盡之數不過百分之四

若欲再開亦可得其忽微如後式

還原以二步八二用籌為法又以二步八二列為實而自相乘之得七萬九千五百二十四分加不盡之分四百七十六共八萬乃以一萬分為一步之法除之當退四位仍得八步合原數

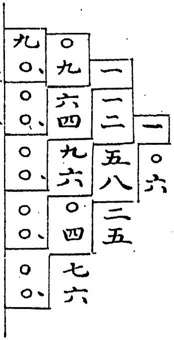
解曰此以一步化為百分故其積萬分何也自乘者横一步直一步也今既以一步化為一百分則是横一百分直一百分而其積一萬分為一步

〇五六四二　自乘　七九五二四
二二五六八　不盡　四七六
〇五六四二步　共得　八〇〇〇〇
七九五二四　萬

假如平方九十步開得九步除實八十一步餘實〇九步不盡小分幾何

法于餘實九步下加八圈則餘實九步化為九億共作五點而以第二點〇九億〇〇分為次商之實

依捷法以初商九步倍作一十八步為廉法列平方籌上為廉隅共法簡籌第四行○七三六略小于餘實商四千分除實七億三千六百萬分餘一億六千四百○○萬分為第三商之實第三點也



九四八六八
步分秒忽微

又依捷法以初商次商九步又十之四倍之得一十

八步八為廉法列平方籌上為廉隅共法簡籌第八行一五一〇四略小于餘實商八除實一億五千一百〇四萬餘一千二百九十六萬分〇〇為第四次商之實第四點也

又依捷法以三次所商共九步四八倍之得一十八步九六為廉法列平方籌上為廉隅共法簡籌第六行一一三七九六略小于實商六除實一千一百三十七萬九千六百分餘一百五十八萬〇四百〇〇

分為第五次商之實第五點也

又依捷法以所商九步四八六倍之得一十八步九七二為廉法列平方籌上為廉隅共法簡籌第八行一五一七八二四略小于實商八除實一百五十一萬七千八百二十四分餘六萬二千五百七十六分不盡凡開得平方每面九步四千八百六十八分亦可名為四分八秒六忽八微不盡一○○○○○○○○之○○○○六二五七六即一萬分之六分有奇

雖不盡不過萬分之一不足為損益可棄不用

還原以九步四八六八用籌為法又為實自乘得八十九億九千九百九十三萬七千四百二十四分加入不盡之分六萬二千五百七十六共九十億以一億分為一步之法除之當退八位仍得九十步合原數

解曰此以一步化為一萬分故其自乘之積一億何也自乘者横一步直一步之積也今既以一萬分為步則是横一萬分直一萬分而其積一億為一步

七五八九四四
五六九二〇八
七五八九四四
三七九四七二
八五三八一二
八九九九九三七四二四
十億千百十萬千百十
億萬萬萬

八六八四九步

自乘	不盡	共得
八		九十億
九		〇
九		〇
九		〇
九		〇
三	六	〇
七	二	〇
四	五	〇
二	七	〇
四	六	〇

若依命分法則還原不合

如前例　原實八步開得方二步除實四步不盡四步法當倍每方二步作四步又加隅一步為命分命

為二步又五分步之四意若曰若得五步則商三步矣今只四步是五分內止得四分也然還原有不合何也

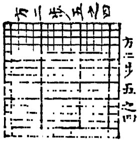
以筭明之

用通分法以命分五通二步得一十分又加得分四共一十四分自乘得一百九十六為實以命分五自乘得二十五分為法每步通作五分橫一步直一步則共得二十五分也除之

二一
一九六
七

得七步又二十五分之二十一以較原實少二十五之四

以圖明之



每步作五分其冪積二十五分方二步積四步共一百分又五之四以乘方二步得四十分倍之為廉積八十分又五之四自乘得隅積一十六分

共九十六分以合原餘積四步該一百分少二十五分之四

以此觀之實數每縮虛數常盈故命分之法不可以還原　其故何也曰隅差也何以謂之隅差曰平方之有奇零其在兩廉者實其在隅者虛何也廉之虛者一面而隅之虛者兩面也即如二步五之四謂五分內虛一分故不能成一步也然試觀于圖兩廉之四步皆虛一分（橫四分直五分積二十分以二十五分計之是為于五分之中虛一分）而隅之一步虛一分有零（橫四分直亦四分積一十六分虛九分以二十五分計之是為五分之中虛二分弱）則是邊數二步五之數者其積不及

五之四也今餘積四步者實數也其邊數常盈于五之四有奇也而命之曰五之四宜其不及矣然則古何以設此法曰古率常寬以為所差者微故命之也不但此也古率圓一圍三方五斜七今考之皆有微差故曰寬也

愚常考定開平方隅差之法法曰如法以命分之毋通其整而納其子即得分為全數以全數自相乘得數為通積另置分毋以分子減之餘數以乘分子而加

之為實乃以分母自乘為法除之即適還原數　如上方二步五之四以分母五通二步得十納子四共十四自乘得方積一百九十六分另以分子四減分母五餘一以轉乘分子四得四即隅差也以隅差加入方積共二百分為實乃以分母五自乘得二十五為法以除實得八步合原積

又如後例　原實九十步開得九步除實八十一步不盡九步法當倍每方九步作十八步又加隅一共

十九步為命分命為九步又十九分步之九意若曰若得十九步則加商一步成十步今只九步是十九分内只得九分也然還原亦不合

以筭明之

用通分法以命分十九通九步得一百七十一步又加得分九共一百八十步自乘得三萬二千四百為實以命分十九自乘得三百六十一為法每步十九分横十九分直十九分共得三百六十一分也除之得八十九步又三百六十一

分之二百七十一以較原實之九十步計少三百六十一分分之九十分

二七

三五二一

三二四〇〇

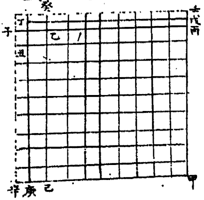
八九

若依隅差之分以得分九減命分十九餘十轉乘得分得九十分為隅差以加自乘通積三萬二千四百

共得三萬二千四百九十為實乃以命分自乘三百六十一為法除之恰得九十步合原積

以圖明之

隅差總圖



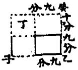
甲戊丁庚形者方九步九分之總形也通為一百八十分積三萬二千四百分以三百六十一為步除之較原實少九十分

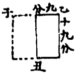
內分甲丙乙巳形為初商方九步之形其積八十一步戊乙形庚乙形次商廉積之形也長九步（通為一百七十一分）濶九分積一千五百三十九分兩廉共計三千〇七十八分

丁乙者小隅者橫直各九分以較廉積中每一步之形（如丑乙）欠一丁癸形即隅差也

以積考之廉九步每步濶九分長一步（通為十九分）積一百七十一分隅濶九分長亦九分積八十一分少九

十分為隅差





立方

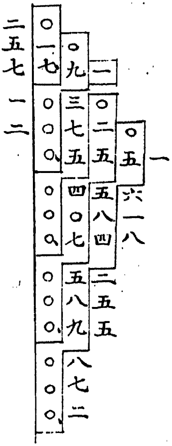
法曰凡立方有餘實不能成一數不可開矣若必欲知

其分秒則于餘實下加三圈（原實一化為一千分）如法開之所得根數是一十分之幾分也若加六圈（原實一化為一百萬分）所得根數是一百分之幾分也若加九圈（原實一化為十億）則根數是一千分之幾分也若加十二圈（原實一化為萬億）則根數是一萬分之幾分也

解曰平方籌兩位故兩位作點而其化小分亦以兩位為冪蓋積多兩位則根數可多一位也（廉一位隅一位故兩位）立方籌三位故三位作點而其化小分亦以三位為

率蓋積多三位則根數可多一位也平廉一位長廉一位隅一位故三位

假如立方積一十七步開得立方二步除八步餘實九



步不盡法于餘實下加十二圈則餘實九步化為九萬億分增四點可加開四位

依捷法截第二點〇九〇〇〇為次商之實 以初

商二自乘四而三之得一十二步為平廉法列立方籌上為平隅共法以初商二三而進位得六〇為長廉法列立方籌下簡共法籌第五行積〇六一二五小于實商五分六行七行亦小于實因無長廉積故不用乃以第五行平方二五與長廉法相乘得一五〇〇為長廉積以加共積共得〇七六二五是為次商五分之積以除實餘一三七五以俟三商

又截取第三點一三七五〇〇〇為三商之實 以
初商次商共二步五分自乘得六二五而三之得一
八七五為平廉法列立方籌上為平隅共法 以初
商次商二步五分三而進位得七五〇為長廉法列
立方籌第七行一三一二八四三共法八四三小于
實商七秋 乃以第七行平方四九與長廉法相乘
得三六七五〇為長廉積以加共積共得一三四九
五九三為三商七秋之積以除實餘〇二五四〇七

以候續商

又截取第四點〇二五四〇七〇〇〇為四商之實

以商數二五七自乘得六六〇四九而三之得一九八一四七為平廉法列立方籌上為平隅共法以

商數二五七進位而三之得七七一〇為長廉法列

立方籌下簡共法籌第一行〇一九八一四七〇一

小于實商一忽

乃以第一行平方一乘長廉得七七一〇為長廉積

以加共積得一九八二二四一一為商一忽之積以
除實餘〇五五八四五八九以俟末商
通第五點〇五五八四五八九〇〇〇為末商之實
以商數二五七一自乘得六六一〇〇四一而三
之得一九八三〇一二三為平廉法列立方籌上為
平隅共法　以商數二五七一進位而三之得七七
一三〇為長廉法列立方籌下簡共法籌第二行〇
三九六六〇二四六〇八小于實商二微

乃以第二行平方○四乘長廉法得三○八五二○

為長廉積以加共積得○三九六六三三三一二八

為末商二微之積以減實餘一六一八二五五八七

二不盡

凡開得立方每面二步五分七秒一忽二微不盡之數不能

成一微棄不用

還原以二步五七一二用籌為法別以二步五七一

二列為實以法乘實得六六一一一○六九四四

〇川五丨一四二四
〇‖二五七一二
一‖七九九八四
一二八五六〇
〇五一四二四
六六一一〇六九四四

二五七一二
步

再乘之得一十六萬九千九百八十三億八千一百
七十四萬四千一百二十八分

一〇二八四八　四
一〇二八四八　四
二三一四〇八　九
一五四二七二　六
〇二五七一二　用省乘法徑進二位　一
〇二五七一二　一
一五四二七二　六
一五四二七二　六

一六九九八三八一七四四一二八

十萬億萬億千億百億十億億千萬百萬十萬萬千百十

乃以不盡之積一十六億一千八百二十五萬五千八百七十二分加入再乘積共得一十七萬億以一萬億為一步之法以一步為萬分橫一萬直一萬商一萬共一萬億除之得一十七步合原數

再乘	一六九九八三八一七四四一二八
不盡	一六一八二五五八七二
共得	一七〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

若依命分法則還原不合

如前所設立方積一十七步開得立方每面二步除積九步餘九步法當以立方二步自乘得四步而三之得十二步為平廉又以立方二步三之得六步為長廉又加一步為隅共一十九步為命分命為立方二步又十九分步之九意若曰餘積若滿十九步則加商一步矣今只有九步是以十九分為一步而今僅得九分也然還原則有不合

以算明之

用通分法以命分十九通立方二步得三十八分又加得分九共四十七分此即所云二步又十九分之九乃立方一面之數也以此自乘得二千二百〇九分再乘得一十〇萬三千八百二十三乃立方二步又十九分之九所容積數也為實別以命分十九自乘得三百六十一再乘得六千八百五十九乃方一步之積為法以除實得一十五步又六千八百五十九之九百三十八較原實一十七步少一步又六千

八百五十九分之五千九百二十一

其故何也曰長廉小隅之差也何以言之曰立方之有奇零其在平廉者實其在長廉小隅者虛何也平廉之虛者一面而長廉虛兩面小隅虛三面故也令以十九分為一步其立方積六千八百五十九分為步法以十九分除之得每三百六十一為分法平廉每步横十九分直十九分高九分積三千二百四十九分法除之得九是為十九分之九適合命分之數也

若長廉横九分直十九分高九分積一千五百三十九分分法除之得四分有奇而已以較平廉九分之積三千二百四十九少一千七百一十分三長廉共六步共少一萬〇二百六十分步法除之得一步又三千四百〇一分為長廉差

若小隅横直高各九分積七百二十九分分法除之得二分有奇而已

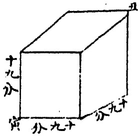
以較平廉九分之積三千二百四十九少二千五百

二十分為隅差

合廉隅兩差計之共少一步又六千八百五十九分

之五千九百二十一

以圖明之



丑寅為立方一步之形每步通為十九分

横直高各十九分積六千八百五十九分

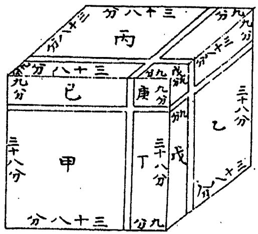
是為步法

以十九分除步法得三百六十一分是為分法

廉隅總圖 見左

甲乙丙三平廉也縱横各方二步通為三十八分厚九分積一萬二千九百九十六分三廉共三萬八千

廉隅總圖

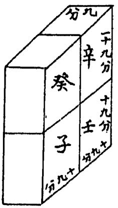


九百八十八分丁戊巳三長廉也各長二步通為三十八分厚濶各九分積三千〇七十八分三廉共九千二百三十四分

庚小隅也長濶高皆九分積七

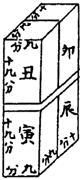
百二十九分
三長廉三平廉一小隅共包一正方形在內
正方形縱横各二步通為三十八分　積五萬四千八百七十二分
總形方二步九分通為四十七分高如之　積一十〇萬三千八百二十三分　以步法除之
得一十五步有奇不滿原實一步又五千九百三十一分

平廉圖



平廉方二步其容四步即辛壬癸子之分形也每步縱横皆一步通為十九分厚皆九分積三千二百四十九辛一形積如此壬癸子者同以分除之適得九分

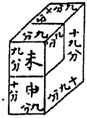
長廉之圖



長廉長二步如丑寅合形通為三十八分厚九分分皆與平廉同所不同者平廉濶十九分而長廉濶只九分故長廉二步尚不及平廉一步之積以積計之每長

廉一步如丑形積一千五百三十九分較平廉每步之積如丑卯合形少一千七百一十分如丑之虛分卯三長廉計六步共少一萬〇二百六十分是為長廉之差

隅差圖



小隅橫直高皆九分如未形于平廉一步之積不及四之一以積計之小隅之積七百二十九較平廉一步之積如未申合形少二千五百二十分如未之虛分申是為小隅之差　合二差共一步五千九百二十一分

今考定開立方廉隅差法法曰凡立方有命分者如法以分母(即命分)通其整而納以分子(即得分)為立方全數以全數自乘再乘得數為立方通積另置命分(母數)與得分(子數)各自乘得數以相減用其餘數以乘得分得數為隅差又置命分與得分相減用其餘數轉與得分相乘以乘命分得數是為長廉每步虛數又以長廉法乘之得數為長廉差合二差數以加通積為實以命分自乘再乘得數為法除之即適還原數

如所設立方積十七步開得立方二步又十九分之九法以分母十九通立方二步而以分子九分納之共四十七分為立方全數以全數自乘再乘得一十〇萬三千八百二十三為通積另置命分十九自乘得三百六十一内減分子九自乘八十一餘二百八十分以分子九乘之得二千五百二十分為隅差又置命分一十九内減得分九餘十分轉乘得分九得九十分以乘命分十九得一千七百一十分為長

廉每步虛數又以長廉法六步乘之得一萬〇二百六十分為長廉差合二差共一萬二千七百八十分以加通積共得一十一萬六千六百〇三分為實以命分一十九自乘再乘得六千八百五十九分為法以除實得一十七步合原積

曆筭全書卷三十三

筆算自序

或問筆算西人之法耳子何規規焉曰非也自圖書啟而文字興參兩倚數畢天下之能事六書九數皆原於易非二事也古人算具以籌策縱横布列畧如筮法之掛扐其字象形為沵是故其縱立者一而一其上横者一而五珠盤之位實此權輿夫用蓍在立卦之後則籌策之算必不在文字先矣是故籌策之未立形聲點畫自足以用而籌策之所得又將紀之簡策以詔方來書

與數之相須較然明也近數百年間再變而為珠盤踵事生新以趨簡易然觀九章中盈朒方程必列副位厥用仍資筆札其源流不可想見與故謂筆算為西人獨智者非也曰今所傳同文算指西鏡録等書亦唐九執歷元明間回回回土盤之遺耳與中算固各有本末矣曰是則然矣然安知九執以前不更有始之始者乎西人之言歷也自多禄某以來二千年屢變而密溯而上之亦不能言其始於何人其為算也亦若是已矣夫古者

聖人聲教洋溢無所不通南車記里之規隨重譯而四達我則失之彼則存之烏乎識其然烏乎識其不然耶且夫治理者以理為歸治數者以數為斷數與理協中西非殊是故禮可以求諸野官可以問諸郯必以其西也而擯之取善之道不如是隘也况求之於古抑實有相通之故乎曰然則子何以易衡而直曰旁行者西國之書也天方國字自右而左歐邏巴字自左而右皆衡列為行彼中文字盡然也彼之文字既衡故筆算亦横

取其便於彼用耳非求異於我也吾之文字既直故筆算

宜直亦取其便於用耳非矜勝於彼也又何惑焉問者

以為然遂書其語為序康熙癸酉二月初吉宣城梅文

鼎撰

發凡

筆算之便與籌算同然籌仍資筆而筆則無假於籌於文人之用尤便筆算無歌括最便學習又無妨酬應久可覆核皆與籌算同詳籌算書

筆算易橫為直以便中土蓋直下而書者中土聖人之舊而吾人所習也與籌算易直為橫其理正同

筆乘原法以法實相疊殊混人目今所更定者一縱一橫法實各居其所而縱橫相遇處得數生焉不惟便用而已其所以然之理亦按圖可知

筆除原法得數與原實相離定位易淆今所更定者法實與得數兩兩相對算理井然定位尤簡

所謂原法者並據同文算指乃西土之舊式利西泰所授而李水部之藻所刻也厥後有西鏡錄等書稍稍講明定位之用蓋亦酌取中法而為之然於古人實如法而一之旨似猶有隔茲以法上得零之訣定之庶令學者一望而知所

冀高賢有以教之幸甚